Blaise Pascal matematico. 2

Carlo Felice Manara

La passione di Blaise Pascal per la verità e il suo spirito di ricerca della certezza in condizioni di informazioni incomplete lo porteranno a creare, con pochi altri matematici, una nuova branca della matematica e a ricercare risposte razionali a questioni fondamentali dell'esistenza.

Ho parlato di Pascal* cultore di fisica, di geometria e di aritmetica; i cenni che ho dato di queste sue scoperte sono necessariamente sommari, perché una loro trattazione soddisfacente richiederebbe ben altro spazio che quello a me qui concesso. Tuttavia il quadro della genialità di Pascal non può dirsi completo se non si fa menzione di una branca della matematica moderna che annovera Pascal tra i suoi creatori: si tratta di quella dottrina che oggi viene comunemente chiamata «calcolo delle probabilità» che è nata proprio all'epoca di Pascal, e di altri pochi altissimi matematici, tra i quali bisogna ricordare il tolosano Pierre Fermat [1601-1665] e l'olandese Christian Huygens [1629-1695].

Il calcolo delle probabilità. La ripartizione delle poste di gioco

A prima vista, può apparire paradossale che esista una teoria matematica della probabilità: infatti la matematica è considerata abitualmente come la scienza della certezza assoluta e definitiva; e di conseguenza si potrebbe pensare che non ci sia nulla talmente distante dalla mentalità e dai metodi della matematica come il concetto di probabilità. Ma queste considerazioni rivelano presto la loro debolezza, quando si rifletta che la matematica non si assume (come vorrebbe il volgo) il compito di rendere certo ciò che non lo è in partenza, ma invece si propone di trarre il massimo di certezza possibile e di conseguenze valide e certe in presenza di informazioni insufficienti ed incomplete le quali, appunto in quanto tali, danno luogo ad incertezza e quindi a giudizi di probabilità.

I biografi di Pascal riportano che egli si interessò di probabilità sotto lo stimolo di certi problemi a lui posti dal Cavaliere de Méré. Era questo un gentiluomo del circolo che Pascal frequentava durante la residenza parigina che precedette quella crisi interiore che i biografi chiamano «la seconda conversione». Non pare che il de Méré fosse particolarmente dedito al vizio del gioco o ad altri divertimenti dissipati, come accade di leggere presso qualche volgarizzatore affrettato e superficiale della storia della matematica; anzi pare che egli fosse piuttosto attento ai problemi della cultura e della scienza.

Ma il gioco d'azzardo doveva essere abbastanza diffuso in una certa società francese dell'epoca, perché noi incontriamo in Pascal un ritratto del giocatore abituale che dimostra la sua capacità di osservare l'uomo e le sue passioni, e di descriverle in modo letterariamente superbo.

Egli scrive infatti:

«Un tale passa la sua vita senza annoiarsi, giocando tutti i giorni una piccola somma di denaro. Se gli date tutte le mattine la somma che egli ritiene di poter guadagnare quel giorno, a patto che rinunci a giocare, lo renderete infelice. Si potrebbe dire che costui cerca il divertimento del gioco e non il guadagno; ma se lo fate giocare per niente egli non si riscalderà e si annoierà. Non è dunque soltanto il divertimento quello che egli cerca: un divertimento asettico e senza passione lo annoia. Bisogna dunque che egli si riscaldi, e che inganni se stesso, immaginando che sarebbe felice di guadagnare quel denaro che egli rifiuta di ricevere a patto di non giocare, allo scopo di fabbricarsi un oggetto di passione, che egli eserciti su questo il suo desiderio, la sua collera, le sue paure, per l'oggetto che si è fabbricato...»[1].

* La prima parte dell'articolo è apparsa sul precedente numero della rivista.

1. «Tel homme passe sa vie sans ennui, en jouant tous les jours peu de chose. Donnez-lui tous les matins l'argent qu'il peut gagner chaque jour, à la charge qu'il ne joue point: vous le rendrez malheureux. On dira peut-être que c'est qu'il recherche l'amusement du jeu, et non pas le gain. Faites-le donc jouer pour rien, il ne s'y échauffera pas et s'y annuiera. Ce n'est donc pas l'amusement seul qu'il recherche: un amusement languissant et sans passion l'ennuiera. Il faut qu'il s'y échauffe et qu'il se pipe lui-même, en s'imaginant qu'il serait heureux de gagner ce qu'il ne voudrait pas qu'on lui donnât à condition de ne point jouer, afin qu'il se forme un sujet de passion, et qu'il excite sur cela son désir, sa colère, sa crainte, pour l'objet qu'il s'est formé...» (P p. 1143).

Alcuni dei problemi presentati a Pascal dal cavaliere de Méré si risolvono con ragionamenti di combinatorica, che Pascal aveva sviluppato; ma un problema particolare non si lascia trattare soltanto con ragionamenti di questo tipo. È questo il celebre problema della ripartizione delle poste in una partita interrotta, che diede luogo alla soluzione divenuta celebre con la espressione «La règle des partis»[2]; Pascal espose questa sua soluzione in una lettera a Pierre Fermat (uno dei grandi matematici contemporanei di Pascal).

Cercherò di riassumere qui il problema ed il ragionamento con il quale Pascal lo risolve.

Consideriamo due giocatori, chiamiamoli A e B, i quali si fronteggiano in un gioco d'azzardo. Le regole di tale gioco siano le seguenti: ognuno dei due mette sul tavolo una data somma di denaro, poniamo 30 monete; si lancia una moneta e se alla caduta essa mostra «testa» il colpo si conta come favorevole ad A, se mostra «croce» il colpo si considera favorevole a B. Il primo dei due giocatori che totalizza 3 colpi favorevoli si prende tutte le 60 monete.

Si vede subito che la partita viene decisa al massimo con 5 lanci; ma supponiamo che, prima che la partita sia decisa, i due convengano di smettere. In particolare supponiamo che ciò avvenga quando A ha avuto 2 colpi favorevoli e B uno solo. Si domanda come debbano essere ripartite le 60 monete che rappresentano la somma globale delle poste dei due giocatori.

Una proposta di ripartizione potrebbe essere quella di assegnarne 40 ad A e 20 a B, perché il primo ha avuto due colpi favorevoli ed il secondo uno solo. Ma Pascal dimostra che questa risposta non è giusta; infatti egli guarda al futuro e ragiona nel modo seguente: se si facesse un altro lancio di moneta, può avvenire che questo dia «testa», ed allora A avrebbe vinto e prenderebbe tutte le 60 monete: se invece il lancio mostrasse «croce», i due giocatori sarebbero alla pari, e quindi, smettendo il gioco, si dividerebbero 30 monete ciascuno.

Dunque, per male che vada, A vincerebbe certamente almeno 30 monete; diamogliele subito e dividiamo in parti uguali ciò che rimane. Si vede subito che in questo modo la somma totale di 60 verrebbe divisa in 4 parti uguali, tre delle quali (cioè 45 monete) spettano ad A.

Con questa procedura Pascal ottiene la valutazione di ciò che oggi si chiama la «speranza matematica» di ciascuno dei due giocatori.

Il problema risolto da Pascal è particolare; ma egli dà anche le procedure per generalizzarlo; e così facendo dimostra di saper ben maneggiare quel principio di induzione che egli aveva già impiegato nei calcoli aritmetici.

Vorrei osservare anche che nell'insieme di applicazioni del calcolo delle probabilità accade spesso di dover risolvere problemi di cui quello risolto da Pascal è caso particolare: si tratta dei problemi di valutazione dell'ammontare che viene chiamato «riserva matematica» di una polizza di assicurazione. È interessante infatti ricordare che il calcolo delle probabilità non è una dottrina frivola, che si interessa di scommesse, e di giochi d'azzardo: si tratta invece di una dottrina che ha vastissime applicazioni nella vita sociale: per esempio nella matematica attuariale e nella teoria delle assicurazioni.

Il metodo della ricerca; la definizione e la deduzione

Una mente come quella di Pascal non poteva accontentarsi della ricerca della verità; essa doveva sfociare, si potrebbe dire quasi necessariamente, nella meditazione sul valore del nostro pensiero, e sul metodo per raggiungere la verità. La sua mentalità gli faceva vedere la matematica in certo modo come la strada maestra per raggiungere il vero; e non so trattenermi dal pensare che egli abbia sempre ricercato la certezza, ed abbia sofferto di non trovarla altrove, nella misura in cui egli l'aveva incontrata nella matematica. Esistono infatti nei *Pensées* delle frasi e dei passi che testimoniano di questa sua ansia e di questa sua sofferenza: egli scrive infatti:

«...non posso approvare che coloro i quali cercano gemendo»[3].

E forse per questo gemito egli si sente fratello di coloro che così cercano. Ed in un'altra pagina egli esprime potentemente la sua ricerca di certezza:

«...noi siamo come coloro i quali remano su un mare vasto, incerto ed ondeggiante, spinti da un confine all'altro.

Qualunque sia il termine al quale pensiamo di poterci attaccare, vacilla e ci lascia; e se lo seguiamo, sfugge alla nostra presa, scivola via e fugge di una fuga eterna. Nulla rimane stabile per noi.

È il nostro stato naturale; e tuttavia è lo stato che più è contrario alle nostre inclinazioni; noi bruciamo dal desiderio di trovare uno stato stabile, di un'ultima base ferma per costruire una torre che si elevi fino all'infinito; ma ogni nostro fondamento crolla, e la terra si apre fino agli abissi»[4].

Quest'ansia e questa sofferenza nella ricerca della certezza trovano in Pascal varie espressioni e realizzazioni, alle quali vorrei dedicare qualche attenzione; la prima si manifesta nel-

2. *La règle des partis. Lettre de Pascal à Fermat* (P p. 77).

3. «...je ne puis approuver que ceux qui cherchent en gemissant» (P p. 1171).

4. «Nous voguons dans un milieu vaste, toujour incertains et flottants, poussés d'un bout vers l'autre.
Quelque terme où nous pensions nous attacher et nous affermir, il branle et nous quitte; et si nous le suivons, il échappe à nos prises, nous glisse et fuit d'une fuite eternelle. Rien ne s'arrête pour nous.
C'est l'état qui nous est naturel, et toutefois le plus contraire à notre inclination; nous brûlons de désir de trouver une assiette ferme, et une dernière base constante pour édifier une tour qui s'élève à l'infini; mais tout notre fondement craque, et la terre s'ouvre jusqu'aux abîmes» (P p. 1109).

la ricerca e nella codificazione di un metodo rigoroso per raggiungere la certezza; vorrei identificare la principale e più metodica espressione di questo suo atteggiamento nel saggio *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, titolo che vorrei tradurre con una frase del tipo: *La mentalità matematica e l'arte della persuasione*. Infatti ho già detto sopra che il termine «géométrie» non ha in Pascal lo stesso significato che esso ha per noi: perché oggi la geometria (nel senso classico del termine) è soltanto una parte, un capitolo del grande *corpus* dottrinale della matematica; e certe tendenze moderne inclinano addirittura a sostenere che tale capitolo vada perdendo progressivamente di importanza; invece all'epoca di Pascal, sia per il prestigio del trattato degli *Elementi* di Euclide, per secoli considerato come il principale trattato, in assoluto, di matematica, sia per lo stato rudimentale ed iniziale in cui si trovavano gli studi di algebra, la geometria praticamente costituiva se non il totale, almeno la parte preponderante della dottrina matematica. La matematica di oggi ha sviluppato moltissimo il proprio aspetto formale, con l'impiego metodico del simbolismo e con lo studio approfondito delle strutture algebriche; di conseguenza la deduzione matematica oggi non viene più fatta con l'impiego del linguaggio comune, come avveniva nella geometria classica, ma diventa sostanzialmente un calcolo (nel senso più generale del termine) cioè una applicazione delle leggi sintattiche dei sistemi di simboli che si adottano.
Resta tuttavia il fatto che la mentalità del matematico è descritta fedelmente dal ritratto che ne fa Pascal, e che abbiamo già visto, quando abbiamo ricordato la sua distinzione tra «esprit de finesse» ed «esprit de géométrie»; e mi pare che lo stesso si possa dire della metodologia che incontreremo tra poco; quindi io ritengo di essere nel giusto cercando di rendere con il sintagma «spirito matematico» l'espressione pascaliana «esprit de géométrie».

Al di là di ogni questione di carattere linguistico, è interessante osservare la riflessione che Pascal fa a proposito della struttura perfetta di una esposizione certa della verità.
Egli scrive:
«Questo metodo, che formerebbe le dimostrazioni nella massima eccellenza (se fosse possibile arrivarci) consisterebbe principalmente in due cose: la prima è non impiegare alcun termine del quale non si abbia prima spiegato chiaramente il senso; la seconda di non presentare alcuna proposizione che non sia dimostrata per mezzo di verità già note. Cioè, in una parola (il metodo consiste) nel definire ogni termine e nel dimostrare ogni proposizione»[5]. Tuttavia egli osserva in seguito che questo metodo non può avere una applicazione assolutamente universale.
«Certamente questo metodo sarebbe bello, ma esso è assolutamente inapplicabile: perché è evidente che i primi termini che si vorrebbero definire supporrebbero l'esistenza di altri che servirebbero alla loro spiegazione, ed analogamente le prime proposizioni che si vorrebbero dimostrare ne supporrebbero altre che le precederebbero; è quindi chiaro che non si arriverebbe mai alle prime proposizioni.
Quindi, spingendo le ricerche sempre più avanti, si arriva necessariamente a dei termini primitivi che non si possono più definire, e a dei principi così chiari che non se ne trovano altri che possano servire per dimostrarli. Appare di qui che gli uomini sono in un'impotenza naturale ed immutabile di trattare una scienza qualunque in un modo assolutamente completo»[6].
Penso che si possa scorgere in queste parole un tono di profondo pessimismo nei riguardi delle procedure che la nostra mente segue per raggiungere la verità; pessimismo amaro che manifesta il dolore profondo di chi ha cercata la certezza in ogni campo, e deve accontentarsi di molto meno. Ritornerò in seguito su questa ansia di certezza che ha tormentato la vita di Pascal, e qui mi limito a citare una sua frase sconsolata:
«Può darsi che esistano delle dimostrazioni vere; ma ciò non è certo. E quindi tutto ciò dimostra che non è certo che tutto sia incerto. A gloria del pirronismo»[7].
È interessante osservare che l'atteggiamento che Pascal prende a proposito dei fondamenti del nostro pensiero è assunto dalla moderna critica dei fondamenti della matematica: infatti nel secolo scorso la matematica ha vissuto una profonda crisi di revisione dei propri metodi e dei propri contenuti; io tendo a credere che tale crisi sia stata scatenata dalla invenzione delle geometrie non euclidee, e soprattutto dalla costatazione del fatto che tali geometrie sono coerenti e quindi hanno uno status epistemologico assolutamente uguale a quello della geometria euclidea classica.
Ne consegue che la matematica (e la geometria in particolare) deve mutare radicalmente l'immagine che essa ha di se

5. «Cette véritable méthode, qui formerait les démonstrations dans la plus haute excellence, s'il était possible d'y arriver, consisterait en deux choses principales: l'une de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant expliqué nettement le sens; l'autre de n'avancer jamais aucune proposition qu'on ne demontrât par des vérités déjà connues; c'est-à-dire, en un mot, á définir tous les termes et à prouver toutes les propositions. [De l'esprit géométrique et de l'art de persuader]» (P p. 577).
6. «Certainement cette méthode serait belle, mais elle est absolument impossible; car il est évident que les premiers termes qu'on voudrait définir, en supposeraient de précédents pour servir à leur explication, et que de même les premières propositions qu'on voudrait prouver en supposeraient d'autres qui les précédassent; et ainsi il est clair qu'on n'arriverait jamais aux premières.
Aussi, en poussant les recherches de plus en plus, on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir, et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui les soient davantage pour servir à leur preuve. D'où il paraît que les hommes sont dans une impuissance naturelle et immuable de traiter quelque science que ce soit dans un ordre absolument accompli» (*De l'esprit géométrique & c.*, P pp. 578, 579).
7. «Il peut se faire qu'il y ait de vraies demonstrations; mais cela n'est pas certain. Ainsi, cela ne montre autre chose, sinon qu'il n'est pas certain que tout soit incertain, à la gloire du pyrronisme» (P p. 1188).

stessa; in particolare deve rinunciare a costruire le proprie teorie considerandole come degli insiemi di enunciati assoluti, che poggiano su una evidenza incontrovertibile, che pretende di conoscere la realtà fino in fondo, con un possesso assoluto e definitivo. È noto che la soluzione di queste aporie è stata cercata con la definizione implicita (o definizione per assiomi, o anche definizione d'uso) dei concetti, e la costruzione delle teorie mediante postulati.
Questa impostazione non ha dato delle soluzioni definitive [sarebbe illusorio pensarlo], ma ha spostato le questioni ad un livello epistemologico molto più profondo: è noto che lo sviluppo di questo ordine di idee ha portato alla impostazione della problematica enunciata da D. Hilbert con la sua *Beweistheorie* ed al teorema di Gödel.

L'analisi delle questioni dei fondamenti che Pascal porta avanti lo conduce anche ad occuparsi della questione della definizione dei concetti: infatti si potrebbe dire che la definizione è lo strumento con cui la nostra mente in certo modo si impossessa del concetto, e, attraverso il concetto, anche dell'essere nella sua essenza, cioè nei principi e nei fondamenti che giustificano e danno certezza alle deduzioni di ogni conseguenza.
Pascal ritrova per parte sua la distinzione tra definizione reale e definizione nominale, cioè una pura imposizione convenzionale di nome; egli afferma che la matematica utilizza metodicamente soltanto la definizione nominale; e su questa osservazione è fondata la tecnica per la deduzione impeccabile che egli enuncia: cioè la tecnica che consiste nel sostituire la definizione ogni volta che insorge un dubbio sulla validità di una deduzione. Una posizione che rivela ancora una volta l'importanza che la mentalità matematica ha nel suo pensiero.
Tuttavia non posso fare a meno di ricordare che nella storia personale di Pascal anche la cosiddetta definizione reale ha avuto una grande importanza: infatti penso che in questo senso sia stata presa la frase del padre, di cui abbiamo detto, che descriveva la geometria; frase che dal giovane genio è stata utilizzata per costruire la geometria per conto suo. Ed in questa costruzione egli ha pure utilizzato le imposizioni di nome, come abbiamo visto quando abbiamo ricordato i nomi convenzionali personali con i quali egli designava la retta ed il cerchio.

L'ansia per la certezza e la grande scommessa per il destino ultimo

Ho cercato di far vedere come la mentalità e le doti di Pascal matematico abbiano avuto una grande influenza su tutto il suo pensiero. In questo ordine di idee non si può evitare di parlare della celebre argomentazione con cui egli cerca di convincere i liberi pensatori della necessità di impegnarsi nella vita spirituale e nella problematica religiosa. È l'argomentazione che viene richiamata con il termine di scommessa, o con il termine equivalente francese «pari».
Mi sembra di poter dire che questa argomentazione abbia

due precedenti, la cui menzione costituisce un classico nella letteratura su questi argomenti. Uno dei precedenti fa riferimento al valore incommensurabile della nostra vita umana, ed alla necessità di gestire questo valore in modo ragionevole; si potrebbe dire che una argomentazione di questo tipo già si incontra nel Vangelo: ivi leggiamo le parole di Gesù[8]: «Che giova infatti all'uomo guadagnare il mondo intero se poi perderà la propria anima? E che cosa darà l'uomo in cambio della propria anima?». Parole dalle quali si trae l'esistenza di valori incommensurabili con quelli materiali, di cui noi pure facciamo tanto conto.

Un secondo motivo è quello della impossibilità di restare indifferenti di fronte a scelte impegnative in questo ambito: perché il decidere di non scegliere risulta in definitiva una scelta, e il volere non prendere posizione è una presa di posizione. Anche questo è un motivo classico di riflessione: lo si ritrova in Aristotele, il quale osserva che filosofare è necessario, e che anche il tentativo di dimostrare che non è necessario filosofare è già un filosofare. Pascal ribadisce questi argomenti classici con forza eccezionale, quando dimostra appassionatamente che occorre scommettere, e che il rifiuto è pure una scommessa. In una pagina che non esito a qualificare drammatica, egli espone alcune opinioni di coloro i quali negano l'esistenza di Dio; a chi dice:

«...il giusto è non scommettere»

egli risponde appassionatamente:

«Ma bisogna scommettere. Ciò non dipende dalla nostra volontà: voi siete imbarcato...»[9].

L'argomento della scommessa sul destino eterno dell'uomo è stato oggetto di analisi e discussioni, anche recenti, così numerose, dotte ed appassionate che sarebbe grave presunzione da parte mia avventurarmi anche soltanto a tentare un censimento di questi scritti e di queste argomentazioni.

Ma non posso evitare di fare qualche osservazione, per ribadire la mia convinzione sull'influenza che il pensiero matematico ha esercitato sulla problematica filosofica di Pascal.

Anzitutto vorrei prendere in considerazione il termine «scommessa» («pari», in francese) che egli impiega: ciò ci conduce in modo naturale al suo atteggiamento nei riguardi del calcolo delle probabilità; atteggiamento che lo porta a cercare il massimo possibile di razionalità, in condizioni di informazioni insufficienti ed incomplete; le quali, come tali, inducono l'incertezza.

Ora è noto che la esistenza di Dio non ha per tutti l'evidenza che hanno le esperienze immediate o le conclusioni di una dimostrazione matematica; ciò causa una incertezza che Pascal affronta con lo stesso spirito di ricerca della massima certezza possibile con il quale ha affrontato la valutazione dei problemi di probabilità.

Tuttavia sono in gioco dei valori infiniti, i quali non possono ovviamente essere quantificati con le procedure sbrigative con le quali noi trattiamo i problemi finanziari ed economici.

E questa mi sembra una delle ragioni per cui l'argomentazione pascaliana della scommessa ha dato luogo a tante dispute, e viene contestata da varie parti. Ripeto che qui ho voluto presentarla non per valutarla, o per esprimere il mio consenso o il mio eventuale dissenso, ma per mostrare come lo spirito di ricerca della certezza nell'incertezza che ha ispirato Pascal nella costruzione dei fondamenti del calcolo delle probabilità abbia ispirato anche la sua ricerca di certezza nell'ambito dei problemi fondamentali della esistenza.

« La strada della scienza non è facile e non lo è mai stata ».

La passione per la verità

Se dovessi affrontare l'impresa ardua di riassumere sommariamente gli aspetti della personalità del Pascal matematico, direi che tutta la sua vita è una dimostrazione vivente della sua passione per la verità: una ricerca del conoscere, del sapere, della fruizione intellettuale che è partita dalla curiosità infantile, origine delle sue domande sulla geometria, per giungere alla contemplazione mistica degli anni della maturità; grande lezione per noi, perché ci dice che questa nostra scienza di cui andiamo tanto orgogliosi non deve essere coltivata soltanto per smania di possesso e di dominio: possesso di beni materiali, dominio sulle forze della Natura e forse anche sugli altri esseri umani. Io sono convinto che la scienza giustifichi la sua esistenza e ritrovi il suo valore se ci apre la strada alla ricerca dei valori spirituali supremi; quella strada che Pascal ha percorso con la potenza del suo genio, ma che tuttavia non ha risparmiato neppure a lui fatiche e dolori.

Infatti la strada della scienza non è facile e non lo è mai stata per nessuno; a questo proposito mi pare esemplare la risposta che, secondo la tradizione, fu data da Euclide ad un potente del suo tempo; risposta in cui il grande geometra affermava che non esiste via regia per l'apprendimento della matematica. Invero di fronte alla scienza non valgono privilegi di ricchezze o di potere, ma vale soltanto la fatica, l'impegno, la dedizione; è questa la grande lezione che ci lasciano i grandi di ogni tempo. E questa lezione noi vogliamo prendere a guida per la nostra vita.

Carlo Felice Manara
Professore Emerito della Università di Milano

L'articolo è pubblicato per gentile concessione della *Rivista di filosofia neoscolastica*, 1995, 4, pp. 531-550.

8. Matteo XVI, 26.
9. (P p. 1213).